

# Methodik zur Schätzung der erweiterten Unsicherheit

Erstellt von: Mag. Mikołaj Kirpluk

*Es handelt sich um die Schätzung der Unsicherheit mit asymmetrischen Konfidenzgrenzen zum Mittelwert, da der Mittelwert als energetischer Mittelwert bestimmt wird.*

## 1. Der mittlere Schalldruckpegel

Der mittlere Schalldruckpegel (für gleichwahrscheinliche Ereignisse / Messungen) ermitteln wir als den sog. „logarithmischen Mittelwert“ nach der folgenden Formel:

$$L_{\text{mittl.}} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 10^{\frac{L_i}{10}} \right] \quad [\text{A}]$$

## 2. Die Begriffsbestimmung des Schalldruckpegels

Der in Dezibel ausgedrückte Schalldruckpegel sind 10 Zehnerlogarithmen vom Zahlenverhältnis des Schalldruckquadrats zum Bezugsdruckquadrat gleich  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa:

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2}, \text{ dB} \quad [\text{B}]$$

wobei:  $p_0$  - Bezugsdruck  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa (Hörschwelle für 1000 Hz)

## 3. Die mittlere relative Exposition

Nach der Umwandlung der Formeln [A] und [B] erhalten wir:

$$\frac{p_{\text{mittl.}}^2}{p_0^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{p_0^2} \quad [\text{C}]$$

das heißt **den Erwartungswert** für die Größe  $p^2/p_0^2$  - die relative Exposition (für die jeweilige Messzeit) - bestimmt durch die Formel für das „arithmetische Mittel“, für das die mathematischen statistischen Formeln bestimmt sind. Durch die Bezeichnung der Größe  $p^2/p_0^2$  als **E** erhalten wir:

$$E_{\text{mittl.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i \quad [\text{D}]$$

## 4. Die Unsicherheit vom Typ A

Die Unsicherheit vom Typ A (bezeichnet als  $U_A$ ) bezieht sich auf die statistische Streuung der Messergebnisse, die als Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften behandelt werden:

- Identische Ereigniswahrscheinlichkeit - für den als arithmetisches Mittel bestimmten Erwartungswert,
- unabhängig,
- reproduzierbar,
- die Messung hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.

### 4.1. Die Unsicherheit des Ergebnisses eines Mittelwertes aus einer Messserie

Die Unsicherheit vom Typ A für die Bestimmung **des Immissionspegels** oder **des Umgebungsschallpegels** auf Grundlage von **n** durchgeführten Elementarmessungen wird gemäß den folgenden Regeln ermittelt:

- Die Ergebnisse der Elementarmessungen des Schalldruckpegels, ausgedrückt in „dB“, transformieren wir zur Form der relativen Exposition (aus der Formel [B]):

$$E_i = \frac{p_i^2}{p_0^2} = 10^{\frac{L_i}{10}} \quad [\text{E}]$$

- Wir berechnen den Mittelwert (den Erwartungswert) - gemäß der Formel [D]:

$$E_{\text{mittl.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i$$

- Wir ermitteln den Schätzwert der mittleren Standardabweichung **S** des Mittelwertes gemäß der Formel:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (E_{\text{mittl.}} - E_i)^2} \quad [\text{F}]$$

- Wir schätzen die Unsicherheit auf einem Konfidenzniveau von 95%, unter Einbeziehung der T-Student-Verteilung, mit der folgenden Formel:

$$U_{A,95}(E_{\text{mittl.}}) = t(n) \cdot s \quad [\text{G}]$$

- Wir bestimmen das Konfidenzintervall auf einem Niveau von 95% für die relative Exposition als:

$$\langle [E_{\text{mittl.}} - U_{A,95}(E_{\text{sr.}})] \leftrightarrow [E_{\text{mittl.}} + U_{A,95}(E_{\text{mittl.}})] \rangle \quad [\text{H}]$$

- Wir berechnen die Konfidenzgrenzen für das oben bestimmte Konfidenzintervall als Schalldruckpegelwerte A (aus der Formel [B]):

$$\langle 10 \cdot \lg[E_{\text{mittl.}} - U_{A,95}(E_{\text{sr.}})] \leftrightarrow 10 \cdot \lg[E_{\text{mittl.}} + U_{A,95}(E_{\text{mittl.}})] \rangle \quad [\text{I}]$$

Das heißt:

$$\langle L_{\text{untere\_Grenze}} \leftrightarrow L_{\text{obere\_Grenze}} \rangle \quad [\text{J}]$$

- Wir berechnen die Unsicherheitswerte des Mittelwertes für den Schalldruckpegel: der obere Wert  $+U_{A,95}^+$  (die Unsicherheit für größere Werte als Mittelwert) und der untere Wert  $-U_{A,95}^-$  (die Unsicherheit für kleinere Werte als Mittelwert), bestimmt zum Mittelwert für den Schalldruckpegel für das oben ermittelte Konfidenzintervall als:

$$\langle [L_{\text{mittl.}} - U_{A,95}^-(L_{\text{mittl.}})] \leftrightarrow [L_{\text{sr.}} + U_{A,95}^+(L_{\text{mittl.}})] \rangle \quad [\text{K}]$$

und drücken das Ergebnis folgendermaßen aus:

$$\mathbf{L_{\text{mittl.}} (+U_{A,95}^+, -U_{A,95}^-)} \quad [\text{L}]$$

#### 4.2. Die Unsicherheit des Ergebnisses bei der Berechnung der Emission

Die Unsicherheit vom Typ A für die Bestimmung **des Emissionspegels** auf Grundlage der ermittelten Mittelwerte *des Immissionspegels* und *des Umgebungsschallpegels* berechnet sich nach den folgenden Regeln:

- Wir berechnen den Emissionswerte, ausgedrückt als relative Exposition:

$$E_{\text{em.}} = E_{\text{im}} - E_{\text{Umgebungsschallpegel}} \quad [\text{M}]$$

HINWEIS: wenn wir dasselbe als Schalldruckpegel ausdrücken, erhalten wir die bekannte Formel:

$$L_{\text{em}} = 10 \cdot \lg(E_{\text{em}}) = 10 \cdot \lg(E_{\text{im}} - E_{\text{Umgebungsschallpegel}}) = 10 \cdot \lg(10^{0,1 L_{\text{im}}} - 10^{0,1 L_{\text{Umgebungsschallpegel}}})$$

- Wir bestimmen den Fehler des Emissionsergebnisses für die relative Exposition:

$$U_{A,95}(E_{\text{em}}) = \sqrt{[U_{A,95}(E_{\text{im}})]^2 + [U_{A,95}(E_{\text{Umgebungsschallpegel}})]^2} \quad [\text{N}]$$

- Und anschließend wiederholen wir das Verfahren gemäß den Formeln von [H] bis [L].

#### HINWEIS:

Wenn die Differenz zwischen dem Immissionspegel und dem Umgebungsschallpegel 10 dB übersteigt, kann entsprechend der Messmethodik [8] den Einfluss des Umgebungsschallpegels außer Acht gelassen werden. Dann muss aber der aus solcher Vereinfachung resultierende Fehler (Überbewertung des Emissionsergebnisses) mit 0,5 dB für die o.g. Differenz von 10 dB bzw. 0,1 dB für eine Differenz von 15 dB berücksichtigt werden.

### 4.3. Die Unsicherheit des Ergebnisses bei der Berechnung des gleichwertigen Pegels

#### 4.3.1. Die Unsicherheit der Zeitbestimmung

Die Unsicherheit bei der Bestimmung der Dauer einer akustischen Situation, für die die Elementarmessungen durchgeführt wurden, ist nach den folgenden Regeln zu ermitteln:

- Ein Ereignis, das die gesamte normative Betrachtungszeit  $T$  dauert - Unsicherheit gleich „0“,
- Ereignisse mit strikt festgelegter Dauer in der normativen Betrachtungszeit - Unsicherheit gleich „0“,
- Ereignisse mit einer variablen Dauer in der normativen Beobachtungszeit - Unsicherheit wird gemäß den Leitlinien aus [5] für das Modell eines „Rechtecks“ festgelegt, wobei die untere und die obere Grenze des Ereignisintervalls entsprechend die minimale und maximale Dauer der Situation darstellt, und die mittlere Dauer als arithmetisches Mittel aus diesen Grenzen angenommen wird.

Die Unsicherheit auf einem Konfidenzniveau von 95% wird als 95% der maximalen Abweichung vom Mittelwert in beiden Richtungen angenommen.

- Bei akustischen Situationen, deren Dauer anderen Verteilungen unterliegen - ist individueller Ansatz zu verwenden.

#### 4.3.2. Unsicherheit bei der Bestimmung des gleichwertigen Pegels

Die Unsicherheit vom Typ A bei der Bestimmung des gleichwertigen Pegels berechnet sich auf der Grundlage der bekannten Anteile der Emission  $E_{em}$  für jede akustische Situation und die Dauer dieser Situationen mit den entsprechenden Unsicherheiten  $U_{A,95}(E_{em})$ .

- Die gleichwertige relative Exposition für  $m$  akustische Situationen in der normativen Betrachtungszeit  $T$  wird aus der Formel für die relativen Expositionen ermittelt:

$$E_{eq} = \sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot E_k \quad [O]$$

HINWEIS:

Wenn wir dasselbe als Schalldruckpegel ausdrücken, bekommen wir die bekannte Formel für den gleichwertigen Pegel:

$$L_{eq} = 10 \cdot \lg(E_{eq}) = 10 \cdot \lg\left(\sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot E_k\right) = 10 \cdot \lg\left(\sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot 10^{0,1L_k}\right)$$

- Es wird die Unsicherheit der gleichwertigen relativen Exposition für jede akustische Situation bestimmt:

$$U_{A,95}(E_k) = \sqrt{\left[\frac{t_k}{T} U_{A,95}(E_{em})\right]^2 + \left[10^{0,1L} \cdot \frac{U_{A,95}(t_k)}{T}\right]^2} \quad [P]$$

- Es wird die Unsicherheit der resultierenden gleichwertigen relativen Exposition für die Summe der akustischen Situationen bestimmt:

$$U_{A,95}(E_{eq}) = \sqrt{\sum_{k=1}^m [U_{A,95}(E_k)]^2} \quad [Q]$$

- Anschließend wiederholen wir das Verfahren gemäß den Formeln von [H] bis [L].

## 5. Die Unsicherheit vom Typ B

Die Unsicherheit vom Typ B (bekannt als  $U_B$ ) steht mit der Ungenauigkeit der Messgeräte, der Prüfverfahren und der angenommenen Modelle der akustischen Phänomene im Zusammenhang.

Die Methoden zur Bestimmung dieser Unsicherheit führen dazu, dass „die Schätzung der Unsicherheit vom Typ B mehr eine empirische Kunst als Handwerk“ ist [4], und wir bestimmen diese mit anderen Methoden als die der mathematischen Statistik - die Grundlage für diese Schätzungen sind:

- Datenblätter, Zertifikate,
- Literaturangaben,
- Früher gewonnene Messdaten,
- Eigene Erfahrung und Erkenntnisse,
- Detaillierte Kenntnis der untersuchten Erscheinungen.

Für die bekannten Unsicherheiten für die Schalldruckpegel erhalten wir aus der Formel [B] die Formel für die Unsicherheiten der relativen Expositionen (in einem allgemeinen Fall):

- Der obere Wert der Unsicherheit für die relative Exposition:

$$\Delta E_+ = 10^{\frac{L_{\text{Syr}} + \Delta L_+}{10}} - 10^{\frac{L_{\text{Syr}}}{10}} = 10^{\frac{L_{\text{Syr}}}{10}} \cdot \left( 10^{\frac{\Delta L_+}{10}} - 1 \right) \quad [\text{R1}]$$

- Der untere Wert der Unsicherheit für relative Exposition:

$$\Delta E_- = 10^{\frac{L_{\text{Syr}}}{10}} - 10^{\frac{L_{\text{Syr}} - \Delta L_-}{10}} = 10^{\frac{L_{\text{Syr}}}{10}} \cdot \left( 1 - 10^{-\frac{\Delta L_-}{10}} \right) \quad [\text{R2}]$$

Da hier eine Abhängigkeit vom aktuellen Wert des Schalldruckpegels vorkommt, so ist eine bequemere Form für die Darstellung der Unsicherheit vom Typ B die relative Unsicherheit (bezogen auf den Wert der relativen Exposition) für die relative Exposition (bezogen auf das Quadrat des Bezugsdrucks  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa):

- Der obere Wert der relativen Unsicherheit für die relative Exposition:

$$\frac{\Delta E_+}{E} = 10^{\frac{\Delta L_+}{10}} - 1 \quad [\text{S1}]$$

- Der untere Wert der relativen Unsicherheit für die relative Exposition:

$$\frac{\Delta E_-}{E} = 1 - 10^{-\frac{\Delta L_-}{10}} \quad [\text{S2}]$$

Für die angegebenen / angenommenen / geschätzten Unsicherheiten vom Typ B, ausgedrückt als Abweichungen der Schalldruckpegel, erhalten wir die folgenden relativen Unsicherheiten vom Typ B auf einem Konfidenzniveau von 95% für die relativen Expositionen, unter Zugrundelegung derselben Abweichungen (oben und unten) für die Schalldruckpegel:

- Für das Phänomen, für das die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte mit einem „**Rechteck**“ modelliert wird:

$$(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \left( 10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1 \right) \cdot 0,95 \\ \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \cdot 10^{-\frac{\Delta L}{10}} \end{cases} \quad [\text{T}]$$

- Für das Phänomen, für das die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte mit einem „**Dreieck**“ modelliert wird:

$$(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \left( 10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1 \right) \cdot \underbrace{\left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{10} \right)}_{\approx 0,767} \\ \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \cdot 10^{-\frac{\Delta L}{10}} \end{cases} \quad [\text{U}]$$

- Die Bestimmung der resultierenden relativen Unsicherheit vom Typ B für **W** berücksichtigte Faktoren erfordert die Durchführung der Rechnungen an den relativen Expositionen separat für die obere Grenze und die untere Grenze:

$$\frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \sqrt{\sum_{j=1}^w \left[ \frac{U_{B,95}^+(E_j)}{E} \right]^2} \quad [\text{V1}]$$

$$\frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \sqrt{\sum_{j=1}^w \left[ \frac{U_{B,95}^-(E_j)}{E} \right]^2} \quad [\text{V2}]$$

Mit den resultierenden relativen Unsicherheiten für die relativen Expositionen können auch die Werte der resultierenden Unsicherheit (oben und unten) für die Schalldruckpegel bestimmt werden:

$$U_{B,95}^+(L) = 10 \cdot \lg \left( 1 + \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \right) \quad [\text{W2}]$$

$$U_{B,95}^-(L) = 10 \cdot \lg \left( 1 - \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} \right) \quad [\text{W2}]$$

## 6. Die erweiterte Unsicherheit

Die erweiterte Unsicherheit für ein Konfidenzniveau von 95% ( $U_{R,95}$ ) bei der Lärmuntersuchung ist ein Resultat der Streuung der Messergebnisse des untersuchten Lärms samt dem Umgebungsschallpegel (Immission) und des Umgebungsschallpegels sowie der Ungenauigkeit im Zusammenhang mit den eingesetzten Messgeräten und dem verwendeten Messverfahren:

$$U_{R,95} = \sqrt{U_{A,95}^2 + U_{B,95}^2}$$

wobei:

$U_{A,95}$  - Unsicherheit vom Typ A im Zusammenhang mit der Streuung der Messergebnisse

$U_{B,95}$  - Unsicherheit vom Typ B im Zusammenhang mit den Messgeräten und dem Messverfahren

- Die Bestimmung der erweiterten Unsicherheit erfordert die Durchführung der Rechnungen an den relativen Expositionen separat für die obere Grenze und die untere Grenze:

$$U_{R,95}^+(E_{eq}) = \sqrt{[U_{A,95}^+(E_{eq})]^2 + [U_{B,95}^+(E)]^2} \quad [X1]$$

$$U_{R,95}^-(E_{eq}) = \sqrt{[U_{A,95}^-(E_{eq})]^2 + [U_{B,95}^-(E)]^2} \quad [X2]$$

- Anschließend wiederholen wir das Verfahren gemäß den Formeln von [H] bis [L] und erhalten ein Ergebnis, das folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$L_{eq} (+U_{R,95}^+; -U_{R,95}^-)$$

## 7. Literatur:

- [1] "Statystyka w pomiarach akustycznych - podstawy"  
[Statistik bei den akustischen Messungen - Grundlagen]  
Mikołaj Kirpluk  
- ein Referat, veröffentlicht in den Unterlagen der 34. Winterschule für Vibroakustische Gefährdungen (Februar 2006)
- [2] „Szacowanie Niepewności Pomiarów Hałasu”- wersja poprawiona i uzupełniona,  
[Schätzung der Unsicherheit bei Lärmmessungen - korrigierte und ergänzte Version]  
Ing. Dariusz Fugiel (Tarnobrzeg, 10.2002)
- [3] „Matematyka - Poradnik encyklopedyczny”  
[Mathematik - enzyklopädischer Ratgeber]  
- I.N.Bronsztejn, K.A.Siemiendiajew  
(PWN, Warschau 1976)
- [4] „Statystyka dla fizyków”  
[Statistik für Physiker]  
- Roman Nowak  
(Wissenschaftlicher Verlag PWN, Warschau 2002) ISBN 83-01-13702-9
- [5] „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.”  
„Darstellungsmethoden der Messunsicherheit. Leitfaden”  
(GUM, 1999) ISBN 83-906546-1-x
- [6] Tablice matematyczne - praca zbiorowa pod red. Witolda Mizierskiego  
[Mathematische Tafeln - Gemeinschaftsarbeit unter der Leitung von Witold Mizierski]  
(Verlag Adamantan, Warschau 2004) ISBN 83-7350-048-0
- [7] „Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa” T.Gerstenkorn, T.Śródka  
[Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung]  
(PWN, Warschau 1972) ISBN 83-01-00204-2
- [8] Anlage Nr. 8 zur Verordnung des Umweltministers vom 23. Dezember 2004 über die Anforderungen an die Durchführung von Messungen der Emissionsgrößen  
(GBl. Nr. 283, Pos. 2842)

